Saintia Matematika
Vol. 1, No. 4 (2013), pp. 399–406.

METODE SUBGRADIEN PADA FUNGSI *NONSMOOTH*

Meiliani, Iryanto, Esther S M Nababan

Abstrak. *Fungsi nonlinier yang variabelnya mutlak merupakan fungsi nonsmooth yang turunannya dapat diselesaikan dengan metode Subgradien. Sebuah vektor* $\nabla f \in \mathbb{R}^n$ *adalah subgradien dari* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *pada* $\mu \in dom\ f$ *jika* $f(u) \geqslant f(\mu) + \nabla f(\mu)^T(u-\mu)\ \forall u \in dom\ f$. *Jika* f *terdifferensialkan maka* $\nabla f(\mu)$ *adalah subgradien dari* f *pada* μ. *Subgradien pada fungsi yang variabelnya mutlak memiliki nilai yang berbeda pada saat variabel fungsi tersebut menuju* x^+ *dan* x^- *begitu juga pada saat menuju* y^+ *dan* y^-. *Pada fungsi nonlinier yang variabelnya memiliki derajat tertentu merupakan gabungan dari beberapa segmen fungsi nonsmooth sehingga kurva fungsi akan terlihat seperti fungsi smooth, namun untuk derajat yang sangat besar, kurva fungsi tersebut akan terlihat jelas sebagai fungsi nonsmooth.*

1. PENDAHULUAN

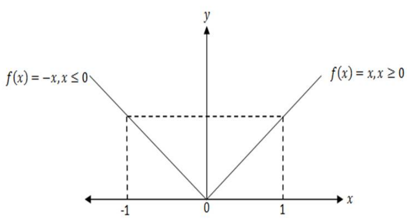
Fungsi nonlinier merupakan fungsi yang memiliki derajat dua atau lebih. Beberapa bentuk fungsi nonlinier adalah fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi eksponensial, dan fungsi logaritmik. Fungsi nonlinier dapat berupa fungsi *smooth* dan fungsi *nonsmooth*. Sebuah fungsi dikatakan *smooth* jika fungsi tersebut dapat diturunkan atau *differentiable* di setiap titik. Sebaliknya, fungsi *nonsmooth* yang kontinu juga mempunyai turunan. Tetapi pada titik tertentu, misalnya pada titik patah, turunannya merupakan turunan berarah.

Received 23-05-2013, Accepted 21-07-2013.
2010 Mathematics Subject Classification: 49J52
Key words and Phrases: Fungsi Nonlinier, Fungsi *Nonsmooth*, Subgradien.

Fungsi nonlinier kontinu *nonsmooth* dapat dikaji dari sisi analisis konveksitas dan optimisasi[1] dan dapat pula dikaji dari sisi analisis *nonsmooth*[2]. Pada analisis konveksitas dan optimisasi, fungsi nonlinier kontinu *nonsmooth* diselesaikan dengan meminimumkan dan atau memaksimumkan fungsi tersebut serta meninjau dari segi konveksitas. Pada analisis *nonsmooth*, fungsi nonlinier kontinu *nonsmooth* dikaji pada sisi *generalized directional derivative* atau turunan berarah. Metode yang dapat digunakan untuk mencari turunan dari fungsi nonlinier kontinu *nonsmooth* adalah metode subgradien.

2. LANDASAN TEORI

Fungsi *Nonsmooth*
Istilah *nonsmooth* mengacu pada situasi di mana terjadi *smootness* (differensiabilitas). Sebuah fungsi yang *nonsmooth* dapat berupa fungsi patah namun tetap kontinu.
Contoh
Diberikan fungsi $f(x) = |x|$
Fungsi di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1: Fungsi $f(x) = |x|$

Fungsi $f(x) = |x|$ merupakan dua buah garis yang bertemu pada satu titik, yaitu titik $(x, y) = (0, 0)$. Kedua garis tersebut memiliki turunan yang berbeda. Turunan dari sebelah kiri $x = 0$ adalah -1 dan turunan dari sebelah kanan $x = 0$ adalah $+1$[3]. Berdasarkan **Contoh** fungsi *nonsmooth* dapat diartikan sebagai fungsi yang mempunyai turunan berarah.

Turunan fungsi *Nonsmooth*

Turunan pada fungsi *nonsmooth* dikaji dari *generalized directional derivative* atau turunan berarah. Untuk menentukan turunan berarahnya maka fungsi *nonsmooth* tersebut harus memenuhi kondisi *lipschitz*.

Andaikan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi dan andaikan x berada di $\mathbb{R}^n$ maka fungsi tersebut dikatakan *lipschitz* terhadap x jika terdapat sebuah skalar $\mathbf{K}$ dan bilangan positif ε sehingga $|f(x'') - f(x')| \leq \mathbf{K}\ |x'' - x'|$ untuk semua x'', x' berada di $x + \varepsilon B$ di mana $\varepsilon > 0$ dan B adalah sebuah *unit ball* di $\mathbb{R}^n$

Andaikan f adalah *lipschitz* terhadap x dan andaikan v vektor lain pada X, maka *generalized directional derivative* pada f di x yang menuju v, disimbolkan $f^0(x; v)$, dan didefinisikan sebagai berikut:

$$f^0(x; v) = \lim_{\substack{y \to x \\ x \to 0}} \frac{f(t + tv) - f(y)}{t} \tag{1}$$

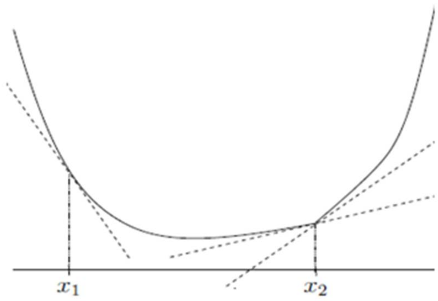
di mana y adalah vektor di X dan t adalah sebuah skalar positif.

Sebagai sebuah fungsi dari v, $f^0(x; v)$ adalah *positively homogeneous* dan *subadditive*, sehingga dapat didefinisikan himpunan tak kosong $\partial f(x)$ adalah *generalized gradien* pada f di x, sebagai berikut:

$$\partial f(x) = \left\{\mu \in \mathbb{R}^n : f^0(x; v) \geqslant (v, \mu), \forall v \text{ di } \mathbb{R}^n\right\}$$

$\partial f(x)$ merupakan himpunan bagian tak kosong pada $\mathbb{R}^n$, untuk setiap v diperoleh $f^0(x; v) = \max\ \{(\mu, v) : \mu \in \partial f(x)\}$ maka f^0 sama dengan $\partial f(x)$.

Sebuah vektor $\nabla f \in \mathbb{R}^n$ adalah subgradien dari $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ pada $\mu \in$ *dom* f jika $f(u) \geqslant f(\mu) + \nabla f(\mu)^T (u - \mu)\ \forall u \in$ *dom* f. Jika f terdifferensialkan maka $\nabla f(\mu)$ adalah subgradien dari f pada μ[4]. Sebuah fungsi memiliki subgradien apabila fungsi tersebut tidak mempunyai turunan yang sama di setiap titik.



Gambar 2: Fungsi yang memiliki subgradien

Pada Gambar 2 memperlihatkan bahwa pada x_1 merupakan bagian *smooth* pada fungsi f yang mempunyai turunan yang sama pada setiap titik. Pada x_2 merupakan bagian *nonsmooth* pada fungsi f sehingga turunannya dapat ditentukan dengan subgradien.

3. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, metode yang digunakan bersifat literatur, yaitu melakukan penelitian literatur, penelitian mandiri, pengumpulan bahan melalui buku-buku referensi, maupun bahan-bahan berbentuk jurnal yang diperoleh dari perpustakaan atau internet.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan pengertian fungsi *nonsmooth*.
2. Memaparkan turunan dari fungsi *nonsmooth*.
3. Mencari turunan dari fungsi *nonsmooth* dengan metode Subgradien.
4. Menyimpulkan hasil analisis dari fungsi *nonsmooth*.

4. PEMBAHASAN

Salah satu fungsi *nonsmooth* adalah fungsi yang variabelnya mutlak. Subgradien dari fungsi *nonsmooth* merupakan turunan berarah dari fungsi tersebut, yakni turunan pada saat x^+ dan x^- ataupun pada saat y^+ dan y^-.

1. Diberikan fungsi $f(x,y) = |x| + |y|$.

   Dengan mengubah tanda nilai mutlak pada fungsi $f(x,y) = |x| + |y|$ maka diperoleh fungsi

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & x>0 \text{ dan } y>0 \\ x-y & x>0 \text{ dan } y<0 \\ -x+y & x<0 \text{ dan } y>0 \\ -x-y & x<0 \text{ dan } y<0 \end{cases}$$

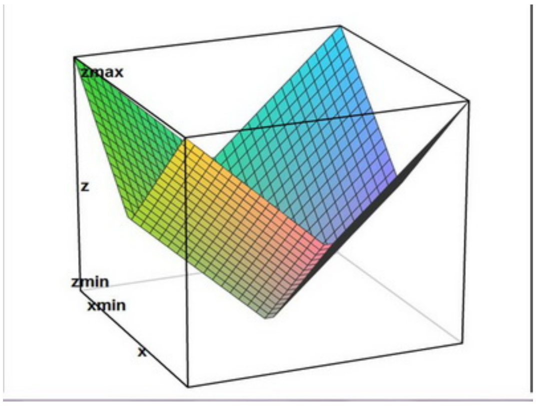
   maka subgradien dari fungsi $f(x,y) = |x| + |y|$ adalah

$$\partial f(x,y)_{x^+} = \begin{cases} 1+y \\ 1-y \end{cases} \quad x>0$$

$$\partial f(x,y)_{x^-} = \begin{cases} -1+y \\ -1-y \end{cases} \quad x<0$$

$$\partial f(x,y)_{y^+} = \begin{cases} x+1 \\ -x+1 \end{cases} \quad y>0$$

$$\partial f(x,y)_{y^-} = \begin{cases} x-1 \\ -x-1 \end{cases} \quad y<0$$



Gambar 3: Fungsi $f(x, y) = |x| + |y|$.

Untuk fungsi yang variabelnya mutlak akan terlihat jelas pada Gambar 3 bahwa fungsi yang dihasilkan merupakan fungsi *nonsmooth*.

2. Diberikan fungsi $f(x, y) = x\,|x| + y\,|y|$.

   Dengan mengubah tanda nilai mutlak fungsi $f(x, y) = x\,|x| + y\,|y|$ maka diperoleh fungsi

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x > 0 \text{ dan } y > 0 \\ x^2 - y^2 & x > 0 \text{ dan } y < 0 \\ -x^2 + y^2 & x < 0 \text{ dan } y > 0 \\ -x^2 - y^2 & x < 0 \text{ dan } y < 0 \end{cases}$$

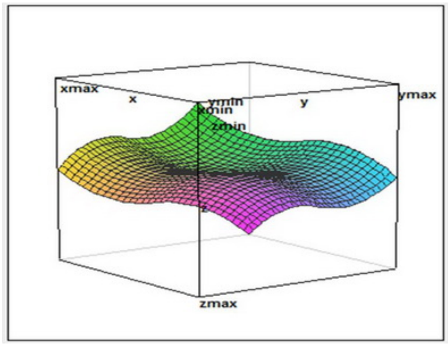
   Maka subgradien dari fungsi $f(x, y) = x\,|x| + y\,|y|$

$$\partial f(x,y)_{x^+} = \begin{cases} 2x + y^2 \\ 2x - y^2 \end{cases} \quad x > 0$$

$$\partial f(x,y)_{x^-} = \begin{cases} -2x + y^2 \\ -2x - y^2 \end{cases} \quad x < 0$$

$$\partial f(x,y)_{y^+} = \begin{cases} x^2 + 2y \\ -x^2 + 2y \end{cases} \quad y > 0$$

$$\partial f(x,y)_{y^-} = \begin{cases} x^2 - 2y \\ -x^2 - 2y \end{cases} \quad y < 0$$



Gambar 4: Fungsi $f(x, y) = x\,|x| + y\,|y|$

Pada Gambar 4, fungsi $f(x, y) = x\,|x| + y\,|y|$ merupakan fungsi *nonsmooth* namun karena fungsi $f(x, y) = x\,|x| + y\,|y|$ adalah gabungan dari variabel mutlak dan tidak mutlak maka terbentuk fungsi kuadrat di mana patahan pada fungsi $f(x, y) = x\,|x| + y\,|y|$ tidak terlihat jelas.

5. KESIMPULAN

1. Fungsi yang terdiri dari satu variabel mutlak dan berderajat satu merupakan fungsi *nonsmooth* yang mempunyai satu patahan saja.

2. Fungsi yang terdiri dari satu variabel mutlak dan berderajat lebih dari satu sampai derajat tertentu merupakan fungsi *nonsmooth* yang mempunyai banyak patahan sehingga fungsi tersebut akan tampak seperti fungsi *smooth*.

3. Fungsi yang terdiri dari satu variabel mutlak dan memiliki derajat yang sangat besar merupakan fungsi *nonsmooth* yang grafiknya akan menyerupai fungsi tersebut pada derajat satu namun skalanya lebih besar.

4. Fungsi yang terdiri dari dua variabel mutlak sifatnya hampir menyerupai sifat fungsi yang hanya terdiri dari satu variabel, yakni pada derajat satu terdapat satu patahan, pada derajat lebih dari satu sampai derajat tertentu terdiri dari banyak patahan yang terlihat seperti fungsi *smooth* dan pada derajat yang sangat besar menyerupai fungsi awal.

Daftar Pustaka

[1] J.P. Aubin & I. Ekeland. Applied Nonlinear Analysis. Paris, France, (1984).

[2] F.H. Clarke Optimization and Nonsmooth Analysis. Department of Mathematics University of British Columbia, Canada, (1983)

[3] K. Martono. Kalkulus. Penerbit:Jakarta, (2010).

[4] Y. Zhang. Subgradient Method. http://select.cs.cmu.edu/class/10725-S10/recitations/r7/Subgradients.pdf,(2013)

Meiliani: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: meiliani92@gmail.com

Iryanto: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: iryanto_hrp@yahoo.co.id

Esther: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: Esther@usu.ac.id